Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимен математически турнир „Атанас Радев“

Ямбол, 17-19 януари 2020 г.

Ямбол, 2020 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадени са уравненията $x^2+px-2=0$ с реални корени u и $-2v$ и $y^2-4y+q=0$ с корени u и v. Да се запише стойността на израза $\sqrt{4+p}-\sqrt{v}$ във вида $\sqrt{m}-\sqrt{n}$, където m и n са едноцифрени естествени числа.

Решение. От формули на Виет следва, че $u(-2v)=-2$. Тогава $q=uv=1$. От уравнението $y^2-4y+1=0$, намираме $u,v=2\pm\sqrt{3}$.
1 случай. $u=2-\sqrt{3}$, $v=2+\sqrt{3}$. Следователно, $p=-(u-2v)=2+3\sqrt{3}$ и значи

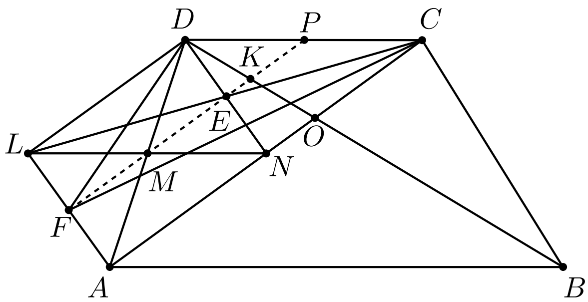
$$\sqrt{4+p}-\sqrt{v}=\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})^2}-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2}=\frac{3+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

което може да се представи като $\sqrt{2}=\sqrt{8}-\sqrt{2}$.
2 случай. $u=2+\sqrt{3}$, $v=2-\sqrt{3}$. Следователно, $p=-(u-2v)=2-3\sqrt{3}$ и значи

$$\sqrt{4+p}-\sqrt{v}=\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})^2}-\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}-\sqrt{6}.$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $q=1$; 1 т. за $u,v=2\pm\sqrt{3}$; по 2 т. за всеки от двата случая.

Задача 8.2. Диагоналите на трапеца $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB>CD$, се пресичат в точка O. Ъглополовящите на външните ъгли на трапеца при върховете A и D се пресичат в точка L. Симетралата на AL минава през средата K на отсечката DO.
а) Да се докаже, че $AD=CD$.
б) Ако симетралата на AL пресича CL и AL съответно в точките E и F, да се докаже, че E е медицентър за триъгълника CDF.



Решение. а) Лесно се съобразява, че $\measuredangle ALD=90^\circ$. Тогава симетралата $S_{AL}\parallel DL$ и пресича AD в средата ѝ M. Следователно MK е средна отсечка в $\triangle AOD$ и получаваме, че $S_{AL}\parallel AC$, т.е. $AC\perp AL$, откъдето заключаваме, че AC е ъглополовяща на $\measuredangle DAB$ и $AD=CD$.

б) От LM – медиана към хипотенузата в $\triangle ADL$ следва, че $LM=\frac{1}{2}AD$ и $LM\parallel CD$. Следователно правата LM пресича диагонала AC в средата му N. От MN – средна отсечка в $\triangle ADC$ следва, че $MN=\frac{1}{2}CD=ML$. От четириъгълник $LNCD$ – успоредник (страните му са две по две успоредни) получаваме, че точка E е среда и на диагонала му DN. От четириъгълника $ANDL$ – правоъгълник (диагоналите му се разполовяват и са равни) получаваме, че $LD=AN=NC=FE$. Нека $FE\cap CD=P$. От M – среда на AD и $MP\parallel AC$ следва, че точка P е средата на CD. Следователно FP е медиана в $\triangle CDF$. От EP – средна отсечка в $\triangle NCD$ следва, че $EP=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{2}FE$, т.е. E е медицентър на $\triangle CDF$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за а); 1 т. за доказване, че $LNCD$ е успоредник; 1 т. за доказване, че $ANDL$ е правоъгълник; 2 т. за довършване.

Задача 8.3. Разглеждаме уравнението

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 3abcd,$$

където a, b, c, d са естествени числа.
а) Да се покаже, че уравнението има решение.
б) Съществува ли решение на уравнението, за което $a > 2020$?

Решение. а) Например $(a; b; c; d) = (1; 2; 2; 3)$.
б) Ще покажем, че ако $(a; 2; 2; d)$ е решение и $a < d$, то решение е и $(d; 2; 2; 6d - a)$. Трябва да проверим дали

$$2d^2 + 8 + 8 + 72d^2 - 24ad + 2a^2 = 12d(6d - a),$$

което наистина следва от $2d^2 + 8 + 8 + 2a^2 = 12ad$. Тъй като в новополученото решение $d < 6d - a$, можем да продължим процеса неограничено, при което по-малкото от двете числа, различни от 2, всеки път расте, така че ще има и решения, в които $a > 2020$.

Оценяване. (7 точки)а) 1т.; б) 6т.

Задача 8.4. Нека $n > 2$ е естествено число и $A_1A_2...A_n$ е правилен n-ъгълник. Ако е дадена редица от два или повече различни върха на многоъгълника, в която всеки връх без първия е свързан чрез отсечка с предходния и отсечките нямат общи вътрешни точки, то обединението на тези отсечки ще наричаме *несамопресичаща се начупена линия (ННЛ)*. Означаваме с a_n броя на всички ННЛ в n-ъгълника. Например $a_3 = 6$, понеже ННЛ са A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, $A_1A_2A_3$, $A_2A_1A_3$, $A_1A_3A_2$.
а) Да се намери формула, изразяваща a_n чрез n (в затворен вид).
б) Колко от числата a_n за $n \leq 2020$ се делят на 7?

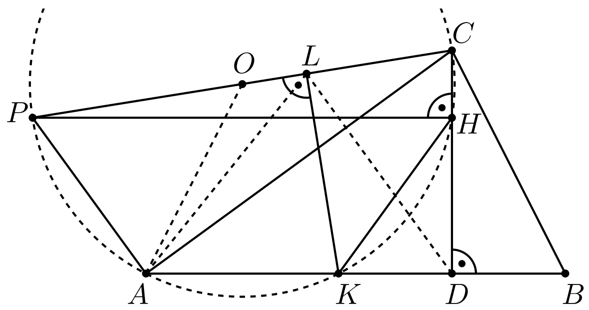
Решение. Да пресметнем броя b_k броя на всички несамопресичащи се начупени линии, свързващи (без повторения) всички върхове на изпъкнал k-ъгълник. Имаме k избора на първия връх от начупената линия, след което имаме по 2 избора за всеки следващ връх без последния (а именно най-левия или най-десния неизползван до момента връх). Но при този подход всяка начупена линия е броена по два пъти (по веднъж от двата си края), така че $b_k = k.2^{k-2} : 2 = k.2^{k-3}$. Този факт запазва верността си и при естествената дефиниция за $k = 2$.
а) Ако по начупената линия има k върха ($k = 2, 3, ..., n$), то има $\binom{n}{k}$ избора за това кои да са те и $b_k = k.2^{k-3}$ избора как да бъдат свързани. Следователно

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k2^{k-3} = \frac{n}{4} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot 2^{k-1} = \frac{n}{4} \cdot ((2+1)^{n-1} - 1) = \frac{n}{4} \cdot (3^{n-1} - 1).$$

б) Това се случва ако n се дели на 7 ($2016 : 7 = 288$ стойности), както и ако 3^{n-1} дава остатък 1 при деление на 7, т.е. ако $n - 1$ се дели на 6 ($2016 : 6 = 336$ стойности), като трябва да изключим дублиранията, т.е. стойностите на n, даващи остатък 7 при деление на 42 ($2016 : 42 = 48$ стойности). Отговор: $288 + 336 - 48 = 576$.

Оценяване. (7 точки) а) 2т. за доказване формулата за b_k и 2т. за доказване формулата за a_n. б) 3т.

Задача 9.1. Даден е разностранен остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H, като $2\measuredangle ABC = 90^\circ + \measuredangle BAC$. Около $\triangle AHC$ е описана окръжност k, която пресича AB за втори път в точка K. Правата през H, успоредна на AB, пресича k за втори път в точка P. Точка D е петата на височината от върха C в $\triangle ABC$, а точка $L \in CP$ е петата на перпендикуляра от K към CP. Да се докаже, че окръжността, описана около $\triangle ADL$ минава през центъра на окръжността k.



Решение. Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. Тъй като $\measuredangle PHC = 90^\circ$, то отсечката CP е диаметър на k и O е нейната среда. От $\measuredangle AHC = 180^\circ - \beta$ в четириъгълника $AHCP$ следва, че $\measuredangle APC = \beta$. Тогава $\measuredangle ACP = 90^\circ - \measuredangle APC = 90^\circ - \beta$. Оттук и от даденото по условие равенство пресмятаме

$$\measuredangle AOP = 2\measuredangle ACP = 180^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Тъй като четириъгълникът $LKDC$ е вписан, имаме

$$\measuredangle LCK = \measuredangle LDK = \measuredangle LCA + \measuredangle ACK = 90^\circ - \beta + \beta - \alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Последното и полученото по-горе дават исканото.
Ако $\alpha < 45^\circ$, то $PL > PO$ и точка O е между P и L. Ако $\alpha > 45^\circ$, то $PO > PL$ и точка L е между P и O. И при двете разположения доказателството, че A, D, O и L лежат на една окръжност е идентично.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за установяване, че отсечката CP е диаметър на k и O е нейната среда; 1 т. за изразяване на $\measuredangle AOP = 2\measuredangle ACP = 180^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha$; 2 т. за изразяване на $\measuredangle LDK = 90^\circ - \alpha$; 2 т. за довършване на решението (по 1 т за всяка възможност на разположението на точките).

Задача 9.2. Да се намерят всички квадратни тричлени с реални коефициенти $f(x) = x^2 + ax + b$ със следните свойства:

(1) корените x_1 и x_2 на $f(x)$ са реални и различни;

(2) съществува квадратен тричлен с реални коефициенти $g(x) = x^2 + cx + d$, за който $g(x_1) = x_2$, $g(x_2) = x_1$ и $g(x_1x_2) = x_2 + x_1^2 - x_2x_1^2$.

Решение. Първо, ще покажем, че $g(x) = f(x) - x - a$. Да забележим, че $g(x) - f(x)$ е линейна функция и значи еднозначно се определя от стойностите ѝ в двете различни точки x_1 и x_2.

Лесно се вижда, че това е именно функцията $-x+(x_1+x_2)$, което от формулите на Виет е $-x-a$.
За израза $g(x_1x_2)$, използвайки формулите на Виет $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b$, получаваме:

$$g(x_1x_2)=g(b)=f(b)-b-a=b^2+ab+b-b-a=x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)x_1x_2+x_1+x_2,$$

а условието $g(x_1x_2)=x_2+x_1^2-x_2x_1^2$ води до

$$(x_2^2-1)x_1^2-x_1(x_2^2-1)=0 \Leftrightarrow (x_2-1)(x_2+1)x_1(x_1-1)=0.$$

1 сл. $x_1=0$. Тогава от формулите на Виет: $b=0$ и $x_2=-a\neq 0$, следователно $f(x)=x^2+ax$. Директно се проверява, че за всяко $a\neq 0$ условие (2) е изпълнено, тъй като $g(x_1x_2)=g(0)=g(x_1)=x_2$.
2 сл. $x_1=1$. Тогава, $x_2=b\neq 1$ и $a=-b-1$. Директно се проверява, че за всяко $b\neq 1$ условие (2) е изпълнено, тъй като $g(x_1x_2)=g(x_2)=1=x_1$.
3 сл. $x_2=1$. Този случай съвпада със случай 2 след преномерация на корените.
4 сл. $x_2=-1$. Тогава, $x_1=-b\neq -1$ и $a=b+1$. Директно се проверява, че за всяко $b\neq -1$ условие (2) е изпълнено, тъй като $g(x)=x^2+bx-1$ и $g(x_1x_2)=g(-x_1)=g(b)=2b^2-1=2x_1^2-1=x_2+x_1^2-x_2x_1^2$.
Окончателно, всички решения са:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & a\neq 0; \\ x^2\pm(a+1)x+a, & a\neq 1. \end{cases}$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $g(x)=f(x)-x-a$; 2 т. за извеждане на уравнението $(x_2-1)(x_2+1)x_1(x_1-1)=0$; по 1 т. за решаването на всеки от случаите $x_1=\{0,1\}$ и $x_2=-1$. Ако не е отчетено, че корените на f трябва да са различни, съответно липсват $a\neq 0$ или $a\neq 1$ в отговора или не е направена проверка, че трите семейства решения удовлетворяват условие (2) - намалява се по 1 т. .

Забележка. Друг начин да покажем, че $g(x)=f(x)-x-a$ е да решим системата

$$\left|\begin{array}{l} g(x_1)=x_2 \\ g(x_2)=x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1^2+cx_1+d=x_2 \\ x_2^2+cx_2+d=x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (x_1-x_2)(x_1+x_2+c+1)=0 \\ x_2^2+cx_2+d=-a-x_2 \end{array}\right. .$$

От първото уравнение получаваме $-a+c+1=0$ и значи $c=a-1$. Заместваме във второто и стигаме до $x_2^2+(a-1)x_2+d=-a-x_2$, откъдето $x_2^2+ax_2=-d-a$. Но, $f(x_2)=0$. Следователно $x_2^2+ax_2=-b$ и $d=b-a$. Окончателно, $g(x)=x^2+(a-1)x+b-a=f(x)-x-a$.

Задача 9.3. Една пермутация

$$\Big(\sigma(1),\ \sigma(2),\ \sigma(3),\dots,\sigma(11)\Big)$$

на числата $1,2,\dots,11$, наричаме 2-наредена, ако $\sigma(i)<\sigma(i+2)$ за всяко $i=1,\dots,9$ и 3-наредена, ако $\sigma(i)<\sigma(i+3)$ за всяко $i=1,\dots,8$. Да се намери броят на 2-наредените пермутации, които не са 3-наредени.

Решение. Ще изведем формула в общия случай, като заместим числото 11 с произволно естествено число n. Ясно е, че за всяко подмножество $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ с $|A| = \left[\frac{n}{2}\right]$ елемента има единствена 2-наредена пермутация с $A = \{\sigma(2), \sigma(4), \ldots, \sigma(2\left[\frac{n}{2}\right])\}$, защото елементите на A трябва да бъдат подредени възходящо, а $\sigma(1) < \sigma(3) < \sigma(5) < \ldots$ трябва да бъде редицата от елементите извън A, подредени във възходящ ред. Оттук следва, че броят $s_2(n)$ на 2-наредените пермутации от n елемента е:

$$s_2(n) = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

За пермутация, която е 2- и 3-наредена имаме

$$\sigma(1) < \sigma(3) < \sigma(5) < \sigma(7) < \ldots, \quad \sigma(1) < \sigma(4) < \sigma(6) < \sigma(8) < \ldots,$$

откъдето

$$\sigma(1) < \min\{\sigma(3), \sigma(4), \ldots\}.$$

Аналогично се доказва, че

$$\sigma(i) < \min_{j \geq i+2} \sigma(j). \tag{1}$$

Обратното е очевидно: ако (1) е изпълнено за всяко i, то σ е 2- и 3-наредена.
Да означим с $s_{23}(n)$ броя на едновременно 2- и 3-наредените пермутации от n елемента. Непосредствено се проверява, че $s_{23}(1) = 1$, $s_{23}(2) = 2$. Ясно е, че всички пермутации, които са 2- и 3-наредени са два вида: (а) пермутации, зо които $\sigma(1) = 1$ и (б) пермутации за които $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$. Броят на пермутаците от тип (а) е $s_{23}(n-1)$, а на тези от тип (б) е $s_{23}(n-2)$. Следователно $s_{23}(n) = s_{23}(n-1) + s_{23}(n-2)$, откъдето $s_{23}(n) = F_{n+1}$, т.е., $n+1$-вото число на Фибоначи (редицата $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots\}$).
Окончателно, търсеният брой е:

$$s_2(11) - s_{23}(11) = \binom{11}{5} - F_{12} = 462 - 144 = 318.$$

Оценяване. (7 точки) 2 т. за извеждане на формула за $s_2(n)$; 4 т. за извеждане на формула за $s_{23}(n)$; 1 т. за верен отговор.

Задача 9.4. Нека $n \geq 4$ е естествено число и да означим

$$D(n) = \max\{\text{НОД}(an + b, bn + a) : 1 \leq a < b \leq n - 1\}.$$

Да се докаже, че $D(n) \geq n - 1$, като равенство се достига тогава и само тогава, когато числата $n - 1$ и $n + 1$ са едновременно прости.

Решение. Лесно се вижда, че $D(n) \geq n - 1$ (например при $a = 1$ и $b = n - 2$ имаме $an + b = 2n - 2$ и $bn + a = (n-1)^2$, които имат общ делител $n - 1$).
Да предположим, че числата $n - 1$ и $n + 1$ са прости. Ще докажем, че $D(n) = n - 1$ и тази стойност се достига точно когато $a + b = n - 1$.

Ако a и b са такива, че $n-1$ не дели $D(n)=(an+b, bn+a)$, то от $D(n)|(bn+a)-(an+b)=(n-1)(b-a)$ следва, че $D(n)|b-a$. Тогава $D(n)\leq b-a\leq n-2$, което противоречи на горната оценка. Следователно $D(n)$ се дели на $n-1$.
Ако a и b, за които $D(n)=\text{НОД}(an+b, bn+a)$ се достига, то $n-1|D(n)$ и следователно $n-1$ дели $(an+b)+(bn+a)=(a+b)(n+1)$. Последното означава, че $n-1$ дели $a+b\leq 2n-3$, т.е. $a+b=n-1$. Тогава $n-1$ дели $D(n)=(an+b, bn+a)=((n-1)(a+1),(n-1)(b+1))=(n-1)(a+1,b+1)$. Тъй като $(a+1)+(b+1)=n+1$ е просто число, имаме $(a+1,b+1)=1$, т.е. $D(n)=n-1$.
Остава да покажем, че ако някое от числата $n-1$ и $n+1$ не е просто, то $D(n)>n-1$. Ако числото $n+1$ не е просто и p е неговият най-малък прост делител, то $a=p-1$ и $b=n-p$ показват, че $D(n)\geq p(n-1)>n-1$.
Ако числото $n-1=k\ell$ не е просто, $2<k\leq\ell$, то $a=\ell+1$ и $b=(k-1)(\ell+1)>a$ дават

$$an+b=(\ell+1)(k\ell+1)+(k-1)(\ell+1)=k(\ell+1)^2,$$

$$bn+a=(k-1)(\ell+1)(k\ell+1)+\ell+1=k(\ell+1)(k\ell-\ell+1).$$

Следователно $D(n)$ се дели на $k(\ell+1)>k\ell=n-1$ и значи $D(n)>n-1$. В случая, когато $n-1=2p$, където p е просто число или 4, $a=1$ и $b=2p-1=n-2$ дават $an+b=4p$ и $bn+a=4p^2$, откъдето $D(n)\geq 4p=2n-2>n-1$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за оценката $D(n)\geq n-1$; 3 т. за доказателство, че $D(n)=n-1$, когато $n-1$ и $n+1$ са едновременно прости; 1 т. за пример на $D(n)>n-1$, когато $n+1$ е съставно; 2 т. за пример на $D(n)>n-1$, когато $n-1$ е съставно.

Задача 10.1. Да се намерят всички реални числа x, за които:

$$x^4-\sqrt{70-x^2}=2020.$$

Решение. Ако положим $\sqrt{70-x^2}=t$, то $t\in[0,\sqrt{70}]$ и уравнението добива вида:

$$(70-t^2)^2-t=2020 \Leftrightarrow t^4-140t^2-t+2880=0 \Leftrightarrow (t-5)(t^3+5t^2-115t-576)=0.$$

От $t\geqq 0$ и $t\leq\sqrt{70}<9$ следва, че $t^3+5t^2-115t-576=(t-9)(t^2+14t+11)-477<0$. Така окончателно $t=5$ и уравнението има две решения $x_1=3\sqrt{5}$ и $x_2=-3\sqrt{5}$.

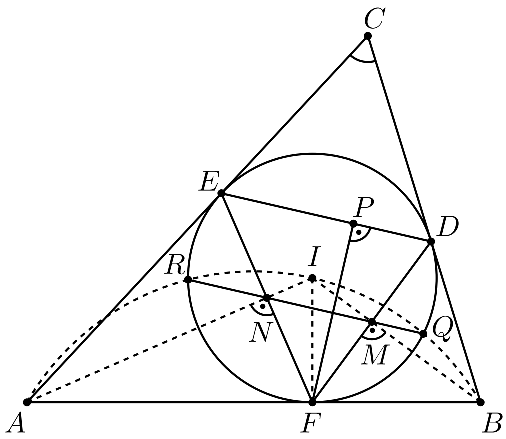
Оценяване. (6 точки) 1 т. за полагането $\sqrt{70-x^2}=t$ и свеждане до уравнение от четвърта степен; 2 т. за разлагането и откриване на решение при $t=5$; 2 т. за доказателство, че няма други решения; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност k, която се допира до страните BC, CA и AB в точките D, E и F съответно. Нека FP е височина в $\triangle DEF$ и симетралата на FP пресича k в точките Q и R.

а) Да се докаже, че точките A, B, Q и R лежат на една окръжност.

б) Ако радиусът на тази окръжност е равен на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, то да се намери $\sphericalangle ACB$.

Решение. Нека I е центърът на k и симетралата на FP пресича DF и EF в точките M и N съответно. Тогава M е среда на DF и от равнобедрения $\triangle BDF$ следва, че M лежи на BI и $BM \perp FD$. От правоъгълния $\triangle BIF$ и от свойството на секущите в k следва, че $BM.MI = FM^2 = FM.MD = QM.MR$, т.е. $RBQI$ е вписан четириъгълник. Аналогично $RAQI$ е вписан четириъгълник и следователно точките A, B, Q, R и I лежат на една окръжност ω. Остава да съобразим, че радиусът на ω е равен на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато симетричната точка на I относно AB лежи на описаната окръжност, т.е. $\sphericalangle AIB + \sphericalangle ACB = 180°$. Но $\sphericalangle AIB = 90° + \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC$ и следователно $\sphericalangle ACB = 60°$.



Оценяване. (6 точки) 4 т. за а); 2 т. за б).

Задача 10.3. Нека $n \geq 4$ е естествено число и да означим

$$D(n) = \max\{\text{НОД}(an+b, bn+a) : 1 \leq a < b \leq n-1\}.$$

Да се докаже, че $D(n) \geq n-1$, като равенство се достига тогава и само тогава, когато числата $n-1$ и $n+1$ са едновременно прости.

Решение. Виж Задача 9.4.

Задача 10.4. Нека K_n е граф с $n \geq 3$ върха, всеки два от които са свързани с ребро. Казваме, че ребрата на K_n са *правилно* оцветени, ако ребрата на всеки триъгълник или са едноцветни, или са оцветени в три различни цвята.

а) Да се докаже, че ако K_n е *правилно* оцветен с използването на поне два цвята, то броят на използваните цветове е поне $\sqrt{n}+1$.

б) Съществува ли *правилно* оцветяване на ребрата на K_{25}, което използва точно 6 цвята?

Решение. Нека K_n е правилно оцветен в $r > 1$ различни цвята. Нека $N(x, c)$ е броят на върховете, съседни на x, които са оцветени в цвят c. Да фиксираме връх x_0 и цвят c_0, за които $N(x_0, c_0)$ е максимално и да означим този максимум с N.
Ребрата, имащи за връх x_0, се разбиват на не повече от r класа едноцветни ребра, всеки от които е с не повече от N елемента. Следователно

$$N \cdot r \geq n-1. \tag{2}$$

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_N$ са съседите на x_0, които са в цвят c_0. Разглеждаме пълния подграф G, индуциран от $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Очевидно всички ребра на G са в цвят c_0. Тъй като има поне два цвята, то съществува връх y от K_n, който е свързан с G с цвят раличен от c_0. От условието за правилна оцветеност следва, че всички ребра yx_i са оцветени в различни цветове, които са различни от c_0. Следователно,

$$r \geq N + 2. \tag{3}$$

От (2) и (3) получаваме

$$r(r-2) \geq rN \geq n-1,$$

откъдето $r \geq \sqrt{n} + 1$.

Нека $n = p^2$, p – просто число, и нека върховете на K_n са

$$V = \{(i,j) \mid 0 \leq i,j \leq p-1\}.$$

Нека цветовете са елементите на $\{0, 1, \ldots, p\}$. Реброто между върховете (i_1, j_1) и (i_2, j_2) оцветяваме в цвят $c \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, ако

$$i_1 - i_2 \equiv c(j_1 - j_2) \pmod{p},$$

и в цвят p, ако $j_1 = j_2$.

Оценяване. (7 точки) Пълно решение на а) се оценява с 5 т. Пълно решение на б) се оценява с 3 т. Пълно решение на а) и б) – 7 т. Построяване на *правилно* оцветяване без доказателство, че е наистина такова – 2 т.

Задача 11.1. (*6 точки*) Реалните числа α, β и γ в този ред образуват аритметична прогресия, а уравнението:

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

има три различни реални корена $x_3 > x_2 > x_1 > 0$, които образуват геометрична прогресия. Да се докаже, че $|x_2 - 3| > \sqrt{6}$.

Решение. Нека частното на геометричаната прогресия от x_1, x_2, x_3 е q с $|q| \geq 1$ и да положим $t = x_2$. Тогава от $x_3 > x_2 > x_1 > 0$ получаваме, че $q > 0$ и $q \neq 1$, откъдето $q > 1$. Следователно $x_1 = \frac{t}{q}$, а $x_3 = qt$ и:

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = \left(x - \frac{t}{q}\right)(x-t)(x-qt) = x^3 - \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) t x^2 + \left(\frac{1}{q} + q + q\right) t^2 x - t^3. \tag{4}$$

Като приравним коефициентите пред съответните степени на x получаваме, че:

$$\alpha = \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) t, \quad \beta = \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) t^2 \text{ и } \gamma = t^3. \tag{5}$$

Тъй като α, β и γ образуват аритметична прогресия в този ред, то:

$$\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) t + t^3 = 2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) t^2,$$

откъдето тъй като $t = x_2 > 0$ получаваме, че:

$$t^2 - 2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right)t + \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 0,$$

Ако положим $a = \frac{1}{q} + 1 + q$, то е ясно, че $a > 3$ и корените на последното уравнение са:

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 - a} \text{ и } t_2 = a + \sqrt{a^2 - a}. \tag{6}$$

Тъй като $a > 3$, то $a^2 - a > 6$ и следователно $t_2 > 3 + \sqrt{6}$. Това показва, че $|t_2 - 3| = t_2 - 3 > \sqrt{6}$. Остана да забележим, че $t_1 t_2 = a$, откъдето

$$t_1 = \frac{a}{a + \sqrt{a^2 - a}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}}.$$

Тъй като $a > 3$, то $1 - \frac{1}{a} > \frac{2}{3}$ и следователно

$$t_1 < \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{6}.$$

Следователно $t_1 - 3 < -\sqrt{6}$ и следователно $|t_1 - 3| > \sqrt{6}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. – за (4); 1 т. – за (5); 1 т. – за (6); 1 т. – за $t_2 - 3 > \sqrt{6}$; 2 т. – за $t_1 - 3 < -\sqrt{6}$.

Задача 11.2. Върху ъглополовящата на $\measuredangle BAC$ на $\triangle ABC$ са избрани точки P (вътрешна за $\triangle ABC$) и Q (външна за $\triangle ABC$). Ако правата CP и описаните окръжности около $\triangle ACQ$ и $\triangle ABP$ се пресичат в една точка, да се докаже, че $\dfrac{BQ.BP}{CQ.CP} = \dfrac{AB}{AC}$.

Решение. Да означим пресечната точка на правата CP и описаните окръжности около $\triangle ACQ$ и $\triangle ABP$ с X. Тогава

$$\measuredangle CXQ = \measuredangle CAQ = \measuredangle PAB = \measuredangle PXB$$

и понеже C, P и X лежат на дена права, то X, B и Q също лежат на една права.
От $\measuredangle AQX = \measuredangle ACX$ и $\measuredangle APB = 180^\circ - \measuredangle AXB = \measuredangle ACQ$ следва, че

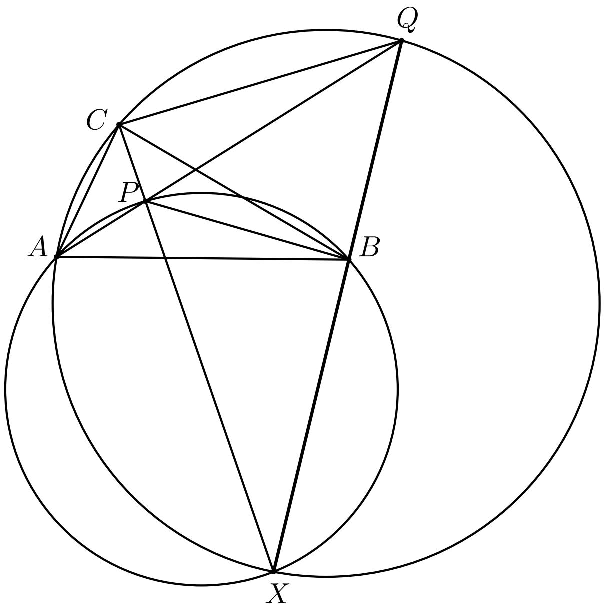
$$\triangle ABQ \sim \triangle APC \text{ и } \triangle ABP \sim \triangle AQC.$$

От горните подобия следва:

$$\frac{BQ}{CP} = \frac{AB}{AP} \text{ и } \frac{BP}{CQ} = \frac{AP}{AC}$$

и след умножаване на тези равенства получаваме

$$\frac{BQ}{CP}.\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AP}.\frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AC}.$$



Оценяване. (6 точки) 2 т. – за X, B и Q лежат на една права; по 1 т. – за всяко от подобията $\triangle ABQ \sim \triangle APC$ и $\triangle ABP \sim \triangle AQC$; 2 т. – за довършване на решението.

Задача 11.3. Нека S е множеството от отсечките XY в равнината, за които $X \neq Y$. Да се намерят всички функции $f : S \to (0; \infty)$, за които

$$f(AB) = f(AC) + f(CB)$$

винаги когато $\angle ACB = 90^\circ$.

Решение.

1. Нека първо $ABCD$ е квадрат с пресечна точка на диагоналите O. Тогава от това, че $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$ получаваме:

$$f(AB) = f(AO) + f(OB), \quad f(BC) = f(BO) + f(CO), \tag{7}$$
$$f(CD) = f(CO) + f(OD) \text{ и } f(DA) = f(DO) + f(AO). \tag{8}$$

   Освен това от това, че $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ имаме, че:

$$f(AB) + f(BC) = f(AC) = f(CD) + f(AD). \tag{9}$$

   От 7 и 9 получаваме, че:

$$\begin{aligned} & (f(AO) + f(BO)) + (f(BO) + f(OC)) = f(AB) + f(BC) \\ = \; & f(AD) + f(CD) = (f(AO) + f(OD)) + (f(OD) + f(CO)). \end{aligned}$$

Това показва, че $f(BO) = f(DO)$. Освен това от равенствата 7 получаваме, че $f(AB) = f(DA)$ и от съображения за симетрия $f(AB) = f(BC) = f(CD) = f(DA)$ и $f(AO) = f(CO)$.

2. От предишната стъпка, ако AB е отсечка със среда M, то $f(AM) = f(MB)$. (достатъчно е да построим квадрат с диагонал AB.) Нека $ABCD$ е ромб с пресечна точка на диагоналите O. Тогава O е среда на BD и следователно $f(BO) = f(DO)$ и тъй като $\angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$, то:

$$f(AB) = f(AO) + f(BO) = f(AO) + f(DO) = f(AD).$$

   Аналогично получаваме, че $f(AD) = f(CD) = f(BC)$.

3. Сега ще покажем, че ако $AB = CD$, то $f(AB) = f(CD)$. От предишната точка това е очевидно, ако $A \equiv C$ или $ABCD$ е ромб. Първо ще разгледаме случая, когато $ABCD$ е успоредник и $AB > AD$. Тогава може да построим равнобедрен триъгълник $AA'D$ със бедро $AA' = A'D = AB$. Нека B' е симетричната на A относно $A'B$. Тогава $ABB'A'$ и $A'B'CD$ са ромбове и следователно $f(AB) = f(A'B') = f(CD)$.

   Сега нека $ABCD$ е успоредник, но $|AB| < |AD|$. Тогава $|AD| = k|AB| + x$ с $k \in \mathbb{N}$ и $x < |AB|$. Тогава може да разделим отсечката AD на $k+1$ отсечки: $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k, A_kD$, така че $|AA_1| = |A_iA_{i+1}| = |AB|$ за $i < k$ и $|A_kD| = x$. Нека $B_i \in BC$, така че $A_iB_i \parallel AB$. Тогава е ясно, че $|A_iB_i| = |AB|$ и следователно $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ са ромбове и ABB_1A_1 също е ромб. Оттук $f(AB) = f(A_iB_i)$ за всяко i. Накрая A_kB_kCD е успоредник с $|A_kB_k| > |A_kD|$ и следователно $f(CD) = f(A_kB_k) = f(AB)$.

   Накрая, нека AB и CD като $AB = CD$ са в общо положение и C не лежи на правата AB. Построяваме успоредник $ABCD'$. От горните разсъждения $f(AB) = f(CD')$ и $f(CD') = f(CD)$. Следователно $f(AB) = f(CD)$.

   Остана да отбележим, че ако A, B, C, D са колинеарни, и $AB = CD$, то може да построим $C'D'$ успоредна и равна на AB, така че C' не е на AB. Тогава от $ABC'D'$ и $C'D'CD$ са успоредници и следователно $f(AB) = f(C'D') = f(CD)$.

4. Така получихме, че $f(AB) = g(|AB|)$, тоест функцията зависи единствено от дължината на отсечката AB. Тогава от даденото условие за f получаваме, че:

$$g(a) + g(b) = g(\sqrt{a^2 + b^2})$$

   за всеки $a, b \in (0; \infty)$. Ако положим $h(a) = g(\sqrt{a})$, то:

$$h(a) + h(b) = g(\sqrt{a}) + g(\sqrt{b}) = g(\sqrt{a+b}) = h(a+b)$$

   за всеки две $a, b \in (0; \infty)$. Това уравнение на Коши, за което $h(a) > 0$, откъдето h е монотонна и следователно всички негови решения са $h(a) = ca$, където $c \in (0; \infty)$ не зависи от a. Обратно, очевидно от теоремата на Питагор, $f(AB) = g(|AB|) = h(|AB|^2) = c|AB|^2$ удовлетворява условието на задачата.

Оценяване. (7 точки) 2 т. – за стъпка 1; 1 т. – за стъпка 2; 2 т. – за стъпка 3; 2 т. – за довършване.

Задача 11.4. (*7 точки*) Даден е свързан граф G с $N \geq 3$ върха, в който всеки цикъл $(v_1, \dots, v_m)$ съдържа три върха v_i, v_j и v_k, за които (v_i, v_j, v_k) е цикъл в G. A и B играят следната игра. Първо A номерира върховете на графа с различни цели числа от 1 до N, след което B избира две естествени числа $N > a > b \geq 1$, и поставя бял пул във върха с номер a и черен пул във върха с номер b.
След това A и B се редуват като започва B. На свой ход B оцветява част (възможно 0) от върховете, които са съседни на черния пул, а след това мести черния пул във все още неоцветен съседен връх с по-голям номер. На свой ход A мести белия пул в съседен неоцветен връх, освен ако такива няма – тогава белият пул остава на място.
B печели, ако успее да премести черния пул във върха с номер N преди A да успее да премести белия пул във върха с номер N или в негов съсед. Да се определи дали B има печеливша стратегия.

Решение. B няма печеливша стратегия. Нека A номерира върховете така. Избира произволен връх v_N и го номерира с N. По-нататък, ако върховете $v_N, v_{N-1}, \dots, v_{i+1}$ са номерирани с $N, N-1, \dots, (i+1)$ съответно, A съпоставя на всеки връх $u \in V \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_N\}$ редицата:

$$\lambda_i(u) = \langle j \mid (u, v_j) \in E \rangle_{j=N}^{i+1}$$

номерата в намаляващ ред на върховете v_j, които са съседи на u. След това A номерира с i връх $u \in V \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_N\}$ с лексикографски най-голяма редица $\lambda_i(u)$. Оттук нататък ще отъждествяваме върха v_i с неговия номер i, получен при горната номерация.

Лема 1 *Ако $i < j < k$ са такива, че $(i,j), (i,k) \in E$, то $(j,k) \in E$.*

Доказателство: Да допуснем противното и нека i_0 е възможно най-голямо, за което твърдението не е вярно. Измежду всички $j < k$, за които $i_0 < j < k$ и $(i,j), (i,k) \in E$ и $(j,k) \notin E$ избираме такива $j_0 < k_0$, че k_0 да е най-голямо.
Сега ще построим безкрайна редица $j_0 < k_0 < j_1 < k_1 < j_2 < k_2 \dots$, така че $(j_p, j_{p+1}) \in E$ и $(k_p, k_{p+1}) \in E$ и $(j_p, k_q) \notin E$ за никои $p, q \geq 0$. Тъй като това означава безкраен брой върхове, то това ще бъде и желаното противоречие.
За $p = 0$ изборът на $j_0 < k_0$ удовлетворява условията. Да допуснем, че $i_0 = k_{-1} < j_0 < k_0 < \dots < j_p < k_p$ е построена. Тъй като $k_{p-1} < j_p$ и $(k_{p-1}, k_p) \in E$, докато $(j_p, k_p) \notin E$, то има връх $j_{p+1} > j_p$, за който $(j_p, j_{p+1}) \in E$ и $(k_{p-1}, j_{p+1}) \notin E$. Да допуснем, че $(k_q, j_{p+1}) \in E$ и нека $q \geq 0$ е минимално. Тогава:

$$(k_q, k_{p-1}, \dots, k_0, i_0, j_0, j_1, \dots, j_p, j_{p+1})$$

е цикъл. От условието следва, че той може да се разбие на цикли с дължина 3. Тъй като $(j_s, k_t) \notin E$ за $s, t \geq 0$ и $s + t \leq p + q$, то получаваме, че (i_0, j_{p+1}, k_q) е цикъл. Сега обаче $i_0 < k_0 < j_{p+1}$ и $(i_0, j_{p+1}), (i_0, k_0) \in E$. От избора на k_0 получаваме, че $(k_0, j_{p+1}) \in E$. Сега

тъй като $(k_0, k_1) \in E$ и $(k_0, j_{p+1}) \in E$ и $i_0 < k_0 < k_1 < j_{p+1}$, то $(k_1, j_{p+1}) \in E$ и по индукция получаваме, че $(k_{p-1}, j_{p+1}) \in E$, което е противоречие.
Сега $j_p < k_p < j_{p+1}$ и $(k_p, j_{p+1}) \notin E$. Тогава от номерацията на j_p и k_p, може да намерим $k_{p+1} > j_{p+1}$ с $(k_p, k_{p+1}) \in E$ и $(j_p, k_{p+1}) \notin E$. Ако допуснем, че $(j_q, k_{p+1}) \in E$ за някое $q < p$, то както и по-горе получаваме противоречие с $(j_p, k_{p+1}) \notin E$. Накрая, ако $(j_{p+1}, k_{p+1}) \in E$ то отново получаваме цикъл, който трябва да съдържа триъгълник (j_s, j_{p+1}, k_{p+1}) – защото $(j_{p+1}, k_q) \notin E$ за $q \leq p$. Това означав, че (j_p, k_{p+1}), което е противоречие с избора на k_{p+1}. С това доказателството на лемата е завършено.
Нека a_n, b_n и U_n са съответно положението на белия и черния пул и множеството от оцветени върхове преди n-тия ход на B. Ще докажем, че A може да си гарантира едно от следните две свойства:

1. От b_n няма нарастващ път до N, който не минава през U_n,

2. $a_n \geq b_n$ и ако $c \in U_n$ и $c > a_n$, то $(b_n, c) \in E$.

В началото това е очевидно. Да допуснем, че преди $(n+1)$-ия ход на B инвариантът е в сила и нека b_{n+1} и U_{n+1} са резултатът от $(n+1)$-ия ход на B. Да допуснем, че от b_{n+1} има нарастващ път до N, който не минава през U_{n+1}.
Тъй като $(b_n, b_{n+1}) \in E$, ако $c \in U_{n+1}$ и $c > a_n$, то $(b_n, c) \in E$. Това е вярно от инварианта, ако $c \in U_n$ и от правилата на играта, ако $c \in U_{n+1} \setminus U_n$. Оттук и лемата следва, че $(b_{n+1}, c) \in E$.
Сега ще докажем, че a_n има съсед a_{n+1}, за който:

$$a_{n+1} \geq b_{n+1} \text{ и } a_{n+1} \notin U_{n+1}.$$

От това, че $a_n \geq b_n$ знаем, че $\lambda_{a_n}(a_n) \succeq_{lex} \lambda_{a_n}(b_n)$. Да допуснем, че $b_{n+1} > a_n$ и всички съседи на a_n, които са по-големи или равни на b_{n+1} са в U_{n+1}. Това означва, че $(a_n, b_{n+1}) \notin E$ и ако $(a_n, v) \in E$ с $v > a_n$, то $v \in U_{n+1}$. Тогава от инварианта следва, че $(b_n, v) \in E$. Следователно $\lambda_{a_n}(b_n) \not\preceq \lambda_{a_n}(a_n)$. Това е противоречие с избора на a_n.
Така остава да разгледаме случая, в който $b_{n+1} \leq a_n$. Тъй като има нарастващ път от b_{n+1} до N, който избягва U_{n+1}, то има ребро $(b', b'') \in E$, за което $b_n \leq b_{n+1} \leq b' \leq a_n < b''$. Първо $\lambda_{a_n}(b_n) = \lambda_{a_n}(a_n)$. Наистина от $b_n < a_n$ имаме, че $\lambda_{a_n}(b_n) \preceq_{lex} \lambda_{a_n}(a_n)$. От друга страна ако $(a_n, c) \in E$ и $c > a_n$, то $c \in U_{n+1}$, за които знаем, че $(b_n, c) \in E$. Така, $\lambda_{a_n}(a_n) \preceq_{lex} \lambda_{a_n}(b_n)$ и следователно $\lambda_{a_n}(b_n) = \lambda_{a_n}(a_n)$. Накрая от $b_n < b_{n+1} \leq b' \leq a_n < b''$ имаме, че $\lambda_{b'}(b') \succeq_{lex} \lambda_{b'}(b_n)$ и $\lambda_{a_n}(b') \preceq_{lex} \lambda_{a_n}(a_n)$ и следователно $\lambda_{a_n}(b') = \lambda_{a_n}(a_n)$. Оттук следва, че всеки съсед на b', който е по-малък от a_n е в U_{n+1}. Това противоречи с избора на b'', който не е оцветен.
Остана да забележим, че ако $c > a_{n+1}$ и $c \in U_{n+1}$, то $(b_n, c) \in E$ и тъй като $(b_n, b_{n+1}) \in E$ и $b_{n+1} \leq a_{n+1} < c$ от лемата следва, че $(b_{n+1}, c) \in E$. Следователно, инвариантът е в сила и след $(n+1)$-ите ходове на двамата играчи.
От инварианта следва, че ако $b_n = N$ за някое n, то и $a_n = N$, следователно B не печели.

Оценяване. (7 точки) 1 т. – за номериране; 1 т. – за лемата и 2 т. – за доказателство на лемата; 1 т. – за формулировка на инварианта; 2 т. – за доказателство, че инвариантът може да се поддържа.

Забележка. Графите в условието на задачата – всеки цикъл съдържа триъгълник – се наричат хордови (chordal). Номерацията, която използва A се нарича LBFS (Lexicographical Breadth First Search). Лемата характеризира хордовите графи. Усложнени варианти на тази номерация служат за характеризация на интервалните и същински интервалните графи – класове от графи, чиито върхове могат да се представят като интервали върху реалната права с ребрата, съответстващи на пресичащи се интервали.

Задача 12.1. Даден е триъгълник Δ със страни a, a, c. Да се намери най-малката възможна стойност на сумата от квадратите на разстоянията от върховете на Δ до права в равнината на Δ.

Решение. В координатна система с начало медицентъра M на Δ и абцисна ос, успоредна на основата на Δ, върховете на Δ имат координати $(-c/2, -h/3)$, $(c/2, -h/3)$ и $(0, 2h/3)$, където $h^2 = a^2 - c^2/4$. Нека $l : px + qy + r = 0$, където $p^2 + q^2 = 1$. Тогава

$$S = (-pc/2 - qh/3 + r)^2 + (pc/2 - qh/3 + r)^2 + (2qh/3 + r)^2 =$$

$$p^2c^2/2 + 2q^2h^2/3 + 3r^2 = [3c^2 + 4q^2(a^2 - c^2)]/6 + 3r^2.$$

Ако $a > c$, то $S \geq c^2/2$, като равенство се достига при $l_1 : x = 0$.
Ако $a < c$ от $q^2 \leq 1$ следва, че $S \geq (4a^2 - c^2)/6$, като равенство се достига при $l_2 : y = 0$.
Ако $a = c$, то $S \geq c^2/2$, като равенство се достига, когато $M \in l$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за S, 1 т. $a \geq c$ и 2 т. за $a \leq c$.

Задача 12.2. Нека k е вписаната окръжност в $\triangle ABC$, $D = AB \cap k$ и $E = CD \cap k$ $(D \neq E)$. Да се докаже, че $DE = 3CE$ тогава и само тогава, когато $\measuredangle AEB = 90^\circ$.

Решение. Полагаме $x = AD$, $y = BD$ и $z = CF$, където $F = AC \cap k$. Понеже $CF^2 = CE.CD$, то (1) $CE = kz$ и $CD = z/k$. Тогава от теоремата на Стюард за $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$ намираме, че

$$(2)\ AE^2 = x^2 + 2(1 - k^2)xz, \quad (3)\ BE^2 = y^2 + 2(1 - k^2)yz,$$

$$(4)\ (1 - k^2)z(x + y) = 4k^2xy,\ (5)\ AE^2 + BE^2 - (x + y)^2 = 2(4k^2 - 1)xy.$$

Следователно (6) $\measuredangle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow DE = 3CE$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за всяко (i).

Задача 12.3. Нека $a > -2$ е реален параметър. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такива че

$$f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^2 + axy + y^2}) \quad \text{за всеки } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Решение. При $a < 0$ имаме, че $f(-ax) = 0$, което е невъзможно.
При $a = 2$ получаваме адитивното уравнение на Коши. Понеже $f > 0$, то (както е добре известно) $f(x) \equiv cx$ $(c > 0)$.
При $a \neq 2$, като заместим x, y с $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ и положим $g(z) = f(\sqrt{z})$, достигаме до

$$g(x) + g(y) = g(x + a\sqrt{xy} + y), \quad \forall x, y > 0.$$

При $a=0$ както по-горе следва, че $g(x)\equiv cx$, т.е. $f(x)\equiv cx^2$ $(c>0)$.
Нека $a>0$, $a\neq 2$. Имаме, че $2g(x)=g((a+2)x)$, откъдето по индукция (1) $2^n g(x)=g((a+2)^n x)$. Тогава

$$5g(x)=g(x)+g((a+2)^2x)=g((1+a(a+2)+(a+2)^2)x)$$

и пак по индукция (2) $5^m g(x)=g((2a^2+6a+5)^m x)$. Следователно

$$\frac{g((2a^2+6a+5)^m)}{g((a+2)^n)}=\frac{5^m}{2^n}.$$

По-нататък, при $z>x>0$ съществува (единствено) $y>0$ така, че $z=x+a\sqrt{xy}+y$. Понеже $g(y)>0$, следва, че g е строго растяща функция. Значи

$$(2a^2+6a+5)^m>(a+2)^n\Leftrightarrow 5^m>2^n,\quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\ln(2a^2+6a+5)}{\ln(a+2)}>\frac{n}{m}\Leftrightarrow\frac{\ln 5}{\ln 2}>\frac{n}{m},\quad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Последното означава, че (3) $h(a)=0$, където

$$h(t)=\ln 2.\ln(2t^2+6t+5)-\ln 5.\ln(t+2).$$

Имаме, че

$$h'(t)=\frac{\ln 4.(2t+3)}{2t^2+6t+5}-\frac{\ln 5}{t+2}=\frac{\ln 4.(2t+3)(t+2)-\ln 5.(2t^2+6t+5)}{(2t^2+6t+5)(t+2)}$$

Числителят p на последния израз е квадратен тричлен със старши коефициент $2\ln(4/5)<0$ и свободен член $\ln(4^6/5^5)>0$. Следователно p има две нули с различни знаци и значи h има най-много две неотрицателни нули (защо?). Понеже $h(0)=0=h(2)$, то в разглеждания случай не съществува съответно f.

Оценяване. (7 точки) По 0,5 т. за $a<0$, $a=0$, $a=2$, (1), (2); 1,5 т. за (3) и 3 т. за довършване.

Задача 12.4. Дадена е функцията $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}$. Да се докаже, че съществува безкрайна строго растяща редица от естествени числа $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, за която:

$$f(a_i,a_{i+1})=f(a_{i+1},a_{i+2}) \text{ за всяко } i\geq 0.$$

Решение. За всяко естествено число $n\in\mathbb{N}$ дефинираме функцията $f_n:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ като:

$$f_n(m)=f(n,m)$$

За $c=0,1$, с $f_n^{-1}(c)$ означаваме множеството от онези естествени числа m, за които $f_n(m)=f(n,m)=c$. Има три основни класа от естествени числа:

$$\begin{aligned} W_0 &= \{n\in\mathbb{N}\,|\,f_n^{-1}(0) \text{ е крайно}\} \text{ и}\\ W_1 &= \{n\in\mathbb{N}\,|\,f_n^{-1}(1) \text{ е крайно}\} \text{ и}\\ M &= \mathbb{N}\setminus(W_0\cup W_1).\end{aligned}$$

Ясно е, че $W_0\cup W_1\cup M=\mathbb{N}$ и следователно поне едно от трите е безкрайно.

1. W_0 е безкрайно. Да обърнем внимание, че за всяко $k \in W_0$, $f_k^{-1}(0)$ е крайно и в частност:
$$W_0 \cap f_k^{-1}(1) = W_0 \setminus f_k^{-1}(0) \text{ е безкрайно.}$$
Сега дефинираме рекурсивно по n редица от естествени числа от W_0, както следва:
$$\begin{aligned} w_0 &= \min W_0 \\ w_{n+1} &= \min(W \setminus \{m \,|\, m \leq w_n\} \cap f_{w_n}^{-1}(1)). \end{aligned}$$
Сега, ако $w_n \in W$, то от това, че $W \cap f_{w_n}^{-1}(1)$ е безкрайно и факта, че има само краен брой естествени числа по-малки от w_n, следва, че:
$$(W \setminus \{m \,|\, m \leq w_n\} \cap f_{w_n}^{-1}(1))$$
е непразно множество от естествени числа и следователно има минимален елемент. Оттук следва, че редицата $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ е добре дефинирана и от дефиницията ѝ получаваме, че тя е строго растяща. Също от дефиницията на w_{n+1} имаме, че $f(w_n, w_{n+1}) = f_{w_n}(w_{n+1}) = 1$, което завършва доказателството в този случай.

2. W_1 е безкрайно. Аналогично на случая когато W_0 е безкрайно, получаваме, че има редица с желаните свойства.

3. W_0 и W_1 са крайни. Тогава за всяко число $m \in M$ имаме, че $f_m^{-1}(1)$ е безкрайно, защото $m \notin W_1$. Тъй като $W_0 \cup W_1$ е крайно, то $f_m^{-1}(1) \setminus (W_0 \cup W_1)$ е безкрайно, което означава, че $f_m^{-1}(1) \cap M$ е безкрайно. Сега аналогично на първия случай може да построим безкрайна редица от елементи в M по рекурсия:
$$\begin{aligned} m_0 &= \min M \\ m_{n+1} &= \min(M \setminus \{k \,|\, k \leq m_n\} \cap f_{m_n}^{-1}(1)). \end{aligned}$$
Очевидно, $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ е строго растяща и $f(m_n, m_{n+1}) = 1$ за всяко n.

Оценяване. (7 точки) 1 т. – за въвеждане на множествата W_0, W_1 и M; 2 т. – за дефиницията на редицата $\{w_n\}$ в случай 1; 2 т. – за доказателство, че тази дефиниция е коректна и върши работа; 1 т. – за съображението $f_m^{-1}(1) \setminus (W_0 \cup W_1)$ е безкрайно в случай 2; 1 т. – за довършване в случай 2.

Забележка. Твърдението на задачата остава вярно, ако заменим $\{0, 1\}$ с произволно крайно множество от числа. Това следва и от безкрайния вариант на теоремата на Рамзи.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.2 – Таня Стоева; 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1– Диана Данова; 9.2 – Станислав Харизанов; 9.3 – Иван Ланджев, Станислав Харизанов; 9.4=10.3 – Петър Бойваленков; 10.1, 10.2 – Стоян Боев; 10.4 – Иван Ланджев; 11.1, 11.3, 11.4 – Стефан Герджиков; 11.2 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов; 12.4 – Стефан Герджиков, Николай Николов